Mathematik-Formelsammlung

1. Vektorrechnung

1.1) Ortsvektor

$$\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

1.2) Gerade

$$g:\vec{x}=\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\text{Orts- oder Stützvektor}}+\lambda\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\text{Richtungsvektor}}$$

1.3) Ebene

$$E:\vec{x}=\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\text{Orts- oder Stützvektor}}+\lambda\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\text{Erster Richtungsvektor}}+\mu\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\text{Zweiter Richtungsvektor}}\leftarrow \text{Parameterform}$$

1.4) Test auf Lineare Abhängigkeit

Zwei Vektoren auf ihre Lineare Abhängigkeit hin zu überprüfen, bedeutet, ihre Richtungsvektoren miteinander zu vergleichen. **Beispiel:**

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\rightarrow \left.\begin{matrix} (1):\ \lambda=\frac{1}{4} \\ (2):\ \lambda=\frac{2}{3} \\ (3):\ \lambda=1 \end{matrix}\right\} \text{nicht einheitlich} \rightarrow \text{linear unabhängig}$$

1.5) Die verschiedenen Formen

1) Parameterform

Siehe unter *Ebene.*

2) Normalenform

$\vec{n}$ *, der Normalenvektor (Vektor, welcher senkrecht auf der Ebene steht):* bildet sich aus dem Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren der Ebene.

CAS: crossp()

$E:\vec{n}\cdot(\vec{x}-\vec{p})=0$ (Umgeformt $E:\vec{n}\cdot\vec{x}-\vec{n}\cdot\vec{p}=0$, dann Ausgangspunkt zur Bildung der Hesse'schen Normalenform oder $E:\vec{n}\cdot\vec{x}=\vec{n}\cdot\vec{p}$, dann Ausgangspunkt zur Bildung der Koordinatenform.).

Beispiel: $E:\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\cdot\left(\vec{x}-\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)=0$

3) Koordinatenform

$$n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = n_1 \cdot p_1 + n_2 \cdot p_2 + n_3 \cdot p_3$$

Beispiel: $E: -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 12$

CAS: dotp()

4) Achsenabschnittsform

$$\frac{\vec{n}\vec{x}}{|\vec{n}\vec{p}|} = \frac{\vec{n}\vec{p}}{|\vec{n}\vec{p}|}$$

Beispiel: $\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{6} = 1$ (Die Pluszeichen sind rot...)

5) Hesse'sche Normalenform

Die Hesse'sche Normalenform ist eigentlich eine Formel zur Berechnung des Abstandes zwischen einem Punkt und einer Ebene. Das Beispiel befindet sich im entsprechenden Kapitel.

$$E: \frac{\vec{n} \cdot \vec{x} - \vec{n} \cdot \vec{p}}{|\vec{n}|} = 0$$

1.6) Kombination der Vektorelemente zu Schnittpunkten und Schnittgeraden

Die folgende Tabelle zeigt die verschiedenen Kombinationsmöglichkeiten:

	Punkt	**Gerade**	**Ebene**
Punkt	= oder ≠	Punktprobe	Punktprobe
Gerade	Punktprobe	Parallel, deckungsgleich, windschief oder sich schneidend	Parallel, sich schneidend oder deckungsgleich
Ebene	Punktprobe	Parallel, sich schneidend oder deckungsgleich	Parallel oder sich schneidend (das Ergebnis in diesem Fall ist eine *Schnittgerade*)
Kugel	Prüfen, wo der Punkt liegt. Einsetzen in Kugelgleichung. Vergleich mit Radius (>, <. = ?)	3 Gleichungssysteme von der Geraden bilden und in Kugelgleichung einsetzen. Ergebnis: 2 Unbekannte λ . Diese in Geradengleichung einsetzen – ergibt Punkt 1 und 2.	Das Ergebnis ist ein Schnittkreis.

Die Suche nach einer der obigen Kombinationen wird immer eine Anzahl von Gleichungen ergeben. Dabei kőnnen 3 Fälle auftreten:

1) Űberbestimmtes Gleichungssystem: mehr Gleichungen als Unbekannte (ergibt Lősung)
2) Bestimmtes Gleichungssystem: gleich viele Gleichungen und Unbekannte (ergibt Lősung)
3) Unterbestimmtes Gleichungssystem: weniger Gleichungen als Unbekannte (keine Lősung)

1.7) Berechnung der Abstände zwischen Vektorelementen

Die folgende Tabelle zeigt die verschiedenen Kombinationsmöglichkeiten:

	Punkt	Gerade	Ebene
Punkt	$P(\ldots)R(\ldots)$ $P\sqrt{((p_1-r_1)^2+(p_2-r_2)^2+\ldots)}$ R	Über Hilfsebene (Koordinatenform) mit Richtungsvektoren als $\vec{n}$; schneiden mit Gerade.	Ebene zur HNF umformen. Punkte in die HNF einsetzen. = d(E, P)
Gerade	Über Hilfsebene (Koordinatenform) mit Richtungsvektoren als $\vec{n}$; schneiden mit Gerade.	Über Hilfsebene aufstellen als Parametergleichung.[1]	HNF aufstellen und Stützpunkt der Geraden einsetzen.
Ebene	Ebene zur HNF umformen. Punkte in die HNF einsetzen = d(E, P)	HNF aufstellen und Stützpunkt der Geraden einsetzen.	HNF aufstellen und Stützpunkte der Ebenen einsetzen.
Kugel[2]	$\sqrt{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}$, wobei der zweite Punkt der Mittelpunkt ist. (-r!)	Über Hilfsebene (Koordinatenform) mit Richtungsvektoren als $\vec{n}$ und; schneiden mit Gerade.	HNF mit $M d(M,E)$. Punkte in die HNF einsetzen. $d(K,E)=d(M,E)-r$

1 - Hilfsebene: E: vec x = (P1) + r(R1) + s(R2)
- Umformen
- Einsetzen: P2 d(g,h) = d(E, P2)

2 Kugelgleichung:

$$\text{K:}\ \vec{x}-\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}^2 = r^2 \rightarrow M(m_1|m_2|m_3)$$

$$\text{K:}\ (x_1-m_1)^2+(x_2-m_2)^2+(x_3-m_3)^2=r^2$$