

1. Grundbegriffe

1.1 Elementare Aussagenlogik

Eine Aussage ist ein sprachlich sinnvoller Satz, der einen Tatbestand ausdrückt, der entweder wahr oder falsch ist.

- Grün: Definition
- Rot: Aussage gemacht
- Rot unterstrichen: Eigenschaft
- „:=“ ist eine Definition
- „p:=“ liest man „per Definition gleich“

Bsp.:

- $p :=$ „2 mal 2 ist vier“
- $q :=$ „10 ist durch 3 teilbar“ (falsch, aber es wird ein Tatbestand ausgedrückt)
- $r :=$ „Alle Menschen sind sterblich“

Für obiges Beispiel: $|p| = 1, |q| = 0, |r| = 1$

Unzulässig:

- „Wie spät ist es?“ (Als Aussage unzulässig; allg. Frage-, Wunsch- und Befehlssätze)

[...]

Definition von elementaren Aussageverbindungen	Name	Symbol
nicht p	Negation	$\neg p$
p und q	Konjunktion	$p \wedge q$
p oder q	Disjunktion	$p \vee q$
wenn p wahr, dann q wahr	Implikation	$ p =1 \Rightarrow q =1$ * Richtig?
p ist wahr genau dann wenn q wahr ist	Äquivalenz	* Weiß nicht...

Aussageverbindungen entstehen durch Verneinung oder Verknüpfung von Aussagen mit Funktoren ...

Eine AV ist wieder eine Aussage, die wahr oder falsch ist gemäß folgender **Wahrheitstabelle**.

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Inhalt dieser Tabelle wird bestimmt im Teilfeld "Prädikatenlogik" der Mathematik.

Bsp.: $-1=1 \Rightarrow (-1)^2=(1)^2$
 $\Rightarrow 1=1$

Bsp.: $-2=2 \Rightarrow -4=4$

Lesebeispiele:

1. Wenn $|p|=1$, dann sei $|\bar{p}|=0$
2. Wenn $|p|=1$ und $|q|=0$, dann sei $|p \wedge q|=0$, bzw. $|p \vee q|=1$
3. Wenn $|p|=0$ und $|q|=1$, dann $|p \Rightarrow q|=1$

Bemerkung: Die Implikation ist nur dann falsch, wenn die **Prämisse** p wahr ist und die **Konklusion** q falsch ist.

Bsp.:

- $p :=$ "3 ist eine Primzahl", $|p| = 1$
- $q :=$ "10 ist durch 3 teilbar", $|q| = 0$
- $r :=$ "4 ist eine Primzahl", $|r| = 0$
- $\bar{p} = 3$ ist keine Primzahl, $|\bar{p}| = 0$
- $p \wedge q = \dots |p \wedge q| = 0$
- $p \vee q = \dots |p \vee q| = 1$

Eine n-stellige AV $a(p_1, p_2, \dots, p_n)$, ($n \geq 2$) ist durch Verknüpfung von n Aussagen p_1, p_2, \dots, p_n mittels Funktoren definiert.

[...]

Bsp. 1: $(p \vee q) \Rightarrow r$ (3-stellige AV)

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow r$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	0	1

Bemerkung: Bei n-stelligen AV gibt es 2^n Kombinationen der Wertebelegungen.

Bsp. 2: $((p \vee q) \vee \bar{p}) \Rightarrow q$

p	q	$p \vee q$	\bar{p}	$(p \vee q) \wedge \bar{p}$	$((p \vee q) \wedge \bar{p}) \Rightarrow q$
0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1

Was ist ein Beispiel einer stets wahren Aussagenverbindungen ("Tautologie") - aussagenlogisches Gesetz?

Bsp. 3: $p \vee \bar{p}$ ist eine stets falsche AV ("Kontradiktion"):

p	\bar{p}	$p \vee \bar{p}$
0	1	0
1	0	0

Man sucht stets nach Tautologien, da sie für mathematische Beweise nützlich sind.

Aussagenlogische Gesetze (Anwendung bei Beweisführung):

- (1) $|p \vee \bar{p}| = 1$ Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten
- (2) $|p \vee \bar{q}| = 0$ Gesetz vom ausgeschlossenen Widerspruch
- (3) $\bar{\bar{p}} \Rightarrow p$ Gesetz von der Negation der Negation
- (4a) $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$
- (4b) $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$ Gesetze von De Morgan
- (5) $\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow p \wedge \bar{q}$
- (6) $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ Kontraposition für indirekten Beweis
- (7) $(\bar{p} \Rightarrow \bar{q}) \wedge q \Rightarrow p$ Gesetz zum indirekten Beweis mit Widerspruch für eine Aussage p .
Wenn die Implikation $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ und die Aussage q gilt (=wahr ist),
so ist p wahr. Dabei wird q Voraussetzung und p Behauptung genannt.
Die auftretende Kontradiktion q und \bar{q} wird als Widerspruch bezeichnet.

Bsp.:

p := "Herr X hat den Mord am Freitagabend in der Scheune nicht begangen."

q := "Herr X hat unter Zeugen am Freitagabend in der Bierstube gegessen."

- (8) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Transitivität der Implikation.

Bemerkung.: In den Gesetzen wurden zur Einsparung von Klammern Vorrangsregeln verwendet:

$$\neg \text{vor} \wedge \text{vor} \vee \text{vor} \Rightarrow \text{vor} \Leftrightarrow$$

Typische mathematische Sätze: " $p \Rightarrow q$ ist wahr "

Direkter Beweis: Wir nehmen an, dass p wahr ist, daher ist auch [irgendwas anderes] wahr, und dann ist [auch irgendwas anderes] wahr, schließlich ist q wahr. Wenn p als wahr angenommen wird.

Indirekter Beweis: Wir nehmen an, dass \bar{q} wahr ist, daher ist auch [irgendwas anderes] wahr und dann ist [wieder was anderes] wahr, und schließlich ist \bar{p} wahr.

Nach (6) ist dann $p \Rightarrow q$ wahr.

Es fehlen jetzt noch Quantoren ("für alle natürlichen Zahlen gilt...") - das kommt nächstes Mal!

Aussageformen:

Ein sprachlich sinnvoller Satz $p(x)$ über einem Tatbestand, der mit einer Variablen x formuliert ist, heißt **Aussageform**, wenn $p(x)$ für jede konkrete Variable x eine Aussage ist.

Aussageformen können durch Funktoren zu Aussageformverbindungen verknüpft werden.

Bsp.:

x sei nat. $p(x) :=$ "x ist eine Primzahl".

$q(x) :=$ "x ist eine gerade Zahl"

$p(x) \wedge q(x) =$ "x ist eine gerade Primzahl"

$$|p(x) \wedge q(x)| = \begin{cases} 1 & \text{für } x=2 \\ 0 & \text{für } x \neq 2 \end{cases}$$

Generalisierung einer Aussageform mit dem **Allquantor**:

Wenn x den Variablenbereich (Menge) M durchlaufen kann:

Partikularisierung einer Aussageform mit dem **Existenzquantor**:

$$\forall x: p(x)$$

$$\forall x \in M: p(x)$$

$$\exists x \in M: p(x)$$

"Es gibt (mindestens) ein x..."

$$\forall x \in \mathbb{N}: q(x) = \text{"Alle nat. Z. sind gerade Z."}$$

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$$

Menge der nat. Zahlen

$$\exists x \in \mathbb{N}: q(x) = \text{"Es gibt eine gerade nat. Z."}$$

$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$|\forall x \in \mathbb{N}: q(x)| = 0, \text{ denn z.B. falsch für } x=1$$

$$|\exists x \in \mathbb{N}: q(x)| = 1, \text{ denn z.B. wahr für } x=2$$

Negation von \forall bzw. \exists :

$$\overline{\forall x \in M: p(x)} \Leftrightarrow \text{Nicht für alle } x \text{ gilt } p(x)$$

$$\overline{\exists x \in M: p(x)} \Leftrightarrow \text{Es gibt kein } x \in M, \text{ so dass } p(x) \text{ gilt.}$$

Prädikatenlogik - Gesetze:

$$(1) \forall x: p(x) \Rightarrow \exists x: p(x)$$

$$(2) \forall x: \overline{p(x)} \Leftrightarrow \overline{\exists x: p(x)}$$

$$(3) \exists x: \overline{p(x)} \Leftrightarrow \overline{\forall x: p(x)}$$

$$(4) \forall x: (p(x) \wedge q(x)) \Leftrightarrow \forall x: p(x) \wedge \forall x: q(x)$$

$$(5) \exists x: (p(x) \vee q(x)) \Leftrightarrow \exists x: p(x) \vee \exists x: q(x)$$

$$(6) \forall x \forall y: p(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x: p(x, y)$$

$$(7) \exists x \exists y: p(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x: p(x, y)$$

$$(8) \exists x \forall y: p(x, y) \rightarrow \forall y \exists x: p(x, y)$$

Bsp.: $x \in$ Menge der Frauen
 $y \in$ Menge der Männer
 $p(x, y) := x$ liebt y

(8) lautet dann: "Wenn es eine Frau gibt, die alle Männer liebt, dann gibt es für jeden Mann eine Frau, die ihn liebt."

1.2 Mengenlehre (elementar)

Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten x unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

nach Georg Cantor (1845-1918)

Objekte x heißen **Elemente** von M .

Bsp.:

(1) $M = \{3, 4, 6\}$: Menge der nat. Z. 3, 4 und 6.
 $3 \in M$ ("Element aus/in") - $7 \notin M$ ("nicht Element aus/in")

(2) Zahlenbereiche: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
 $\mathbb{Z} = \{x \mid x \text{ ist ganze Z.}\} = \{x \mid x = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
Aussageform

$$\mathbb{Q} = \{x \mid x \text{ ist eine rationale Z.}\}$$

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ ist reelle Z.}\}$$

$$\mathbb{C} = \{x \mid x \text{ ist komplexe Z.}\}$$

(3) Menge aller ganzen Zahlen x für die $x^2 = 4$ gilt ("wahr ist"):
 $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ und } x^2 = 4\}$
 $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 4\}$
 $A = \{-2, 2\}$

A, B : Mengen

A heißt Teilmenge von B , falls jedes Element von A auch Element von B ist.

Beziehung: $A \subseteq B$

$$A \subseteq B : \Leftrightarrow \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$$

Teilmengeneigenschaften:

$$\forall A, B, C \subseteq M \text{ gilt: } A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C.$$

Beweis:

$$\left. \begin{array}{l} A \subseteq B, \text{ d.h. } \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B \\ \text{und} \\ B \subseteq C, \text{ d.h. } \forall x : x \in B \Rightarrow x \in C \end{array} \right\} \Rightarrow (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in C) \Rightarrow A \subseteq C. \quad \square$$

A echte Teilmenge von B : $\Rightarrow A \subseteq B \vee \exists b \in B : b \notin A$

$$A = B : \Leftrightarrow A \subseteq B \vee B \subseteq A$$

Gleichheit von Mengen.

$$(B := \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = -4\} = \emptyset)$$

↑
falsch $\in \mathbb{Z}$